Matrices
Exercices

✍ **Exercice 1** Parmi les matrices suivantes, effectuer tous les produits possibles de deux matrices (il y en a 9) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} ;\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

✍ **Exercice 2** Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et BA. En déduire que ni A ni B n'est inversible.

✍ **Exercice 3** Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
Montrer que AB et $A+B$ sont nilpotentes.

✍ **Exercice 4** Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$ et
$\mathcal{A} = \left\{ M(a,b,c),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.
2. Montrer que tout produit d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$

✍ **Exercice 5** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le rang de A selon les valeurs de a.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles A est inversible et préciser son inverse.

✍ **Exercice 6** A l'aide d'une matrice nilpotente, calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C}$$

✍ **Exercice 7** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{tr}A = a+d$ la *trace* de A et $\det A = ad-bc$ son déterminant.

1. Montrer que : $A^2 - (\mathrm{tr}A)\, A + (\det A)\, I_2 = 0_{2,2}$. (théorème de Cayley-Hamilton pour la dimension 2)
2. En déduire que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Préciser alors son inverse.

✍ **Exercice 8** Soient (x_n), (y_n) et (z_n) les suites définies par récurrence par $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 3y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 2y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 3y_n - 2z_n \end{cases}$$

1. Calculer les puissances de $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ à l'aide d'un polynôme annulateur et de suites récurrentes.
2. En déduire les expressions de (x_n) (y_n) et (z_n) en fonction de n.

✍ **Exercice 9** On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que : $A=aP+bQ$.
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=a^nP+b^nQ$.

✍ **Exercice 10** Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver deux réels α et β tels que : $A^2+\alpha A+\beta I_3=0$.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=a_nA+b_nI_n$. (On pourra trouver une relation de récurrence, puis déterminer explicitement l'expression de a_n et b_n en fonction de n.)

✍ **Exercice 11** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=a_nA+b_nA^2$
2. Calculer (a_n) et (b_n) et en déduire la forme générale de A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

✍ **Exercice 12** Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire noté $\mathrm{Tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

1. Montrer que pour $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\mathrm{Tr}A+\mu\mathrm{Tr}B$
2. Montrer que pour $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$
3. Montrer que pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P\in GL_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}\left(PAP^{-1}\right)=\mathrm{Tr}A$

✍ **Exercice 13**

1. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P\in GL_n(\mathbb{K})$, et $B=PAP^{-1}$. Calculer A^k $(k\in\mathbb{N})$ à l'aide de A et P
2. Application : soit $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   Calculer $D=P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de A

✍ **Exercice 14** Calculer les inverse de $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

✍ **Exercice 15** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\omega=e^{2i\pi/n}$, et $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij}=\omega^{(i-1)(j-1)}$. On note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_{ij}}$. Calculer $A\overline{A}$ et en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

✍ **Exercice 16** On note $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes valent 1.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et σ la somme de tous les coefficients de A.
   Montrer que $J_n A J_n = \sigma J_n$. Que vaut J_n^2 ?
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ définie par : $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}.
3. Etudier l'inversibilité de $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ définie par : $\begin{cases} a_{ij} = a & \text{si } i = j \\ a_{ij} = b & \text{sinon} \end{cases}$.

✍ **Exercice 17** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre $p \geqslant 1$. On pose $B = I_n - A$.

1. Montrer que B est inversible et exprimer son inverse à l'aide de A (penser à la factorisation de $I - A^p$)
2. Application : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $B \in GL_4$ et calculer B^{-1}

✍ **Exercice 18** Démontrer le résultat suivant : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Alors A est inversible.

✍ **Exercice 19** <u>Matrices élémentaires</u> : si $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$, on considère la matrice $E_{k\ell}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls hormis le terme d'indice (k, ℓ) qui vaut 1.

1. Exprimer le terme général de $E_{k\ell}$ à l'aide du symbole de Kronecker δ. On rappelle que
   $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
2. Exprimer une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide des matrices $E_{k\ell}$.
3. Pour $(k, \ell, p, q) \in [\![1, n]\!]^4$, calculer $E_{k\ell} E_{pq}$.
4. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $A E_{k\ell}$ et $E_{k\ell} A$.
5. En déduire que la multiplication à gauche de A par $I_n + \lambda E_{pq}$ opère $L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q$.
6. [$*$] Déterminer toutes les matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :
   $$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA$$