Bornes dans $\mathbb{R}$
Correction des exercices

Exercice 1 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+2x+2}$. Alors pour tout réel x :

$$f(x) = 2 - \frac{3}{x^2+2x+2} = 2 - \frac{3}{(x+1)^2+1}$$

Comme $(x+1)^2+1 \geqslant 1$, on a donc :

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence de $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$.

- De plus $f(-1) = -1$, donc $\boxed{\inf\limits_{\mathbb{R}} f = \min\limits_{\mathbb{R}} f = -1}$
- Montrons que $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 2$.
  - 2 est bien majorant de f et n'est pas atteint par f ($f(x) = 2 \Longleftrightarrow 0 = 1$).
  - Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $2-\varepsilon$ n'est pas majorant de f, c'est-à-dire qu'il existe un réel x tel que
  $$f(x) > 2 - \varepsilon \quad (\bigstar)$$
  Or
  $$\begin{aligned}(\bigstar) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{3}{(x+1)^2+1} > 2 - \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad (x+1)^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 1\end{aligned}$$
    - Si $\varepsilon \geqslant 3$, n'importe quel réel x vérifie $(\bigstar)$.
    - Si $\varepsilon < 3$, le réel $x = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1}$ vérifie $(\bigstar)$ (car $(x+1)^2 > x^2 = \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$)

  Dans tous les cas $2-\varepsilon$ n'est pas majorant de f, ce qui confirme notre conjecture : $\boxed{\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 2}$

Remarque 1 Bien entendu une solution beaucoup plus élémentaire aurait consisté à déterminer $f(\mathbb{R})$ au moyen de l'étude des variations de f. C'est une conséquence non triviale de la continuité : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle et cet intervalle se détermine facilement si la fonction est strictement monotone. Nous avons admis ce résultat pour le moment dans le chapitre « notions de fonctions bijectives ».

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,-1]) \cup f([-1,+\infty[) = [-1,2[\cup [-1,2[= [-1,2[$.
Donc $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = \sup[-1,2[= 2$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = \inf[-1,2[= -1$.

Exercice 2 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2\cos x}{1+x^2}$.

- On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$, et $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$ existent.
- Montrons que $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 1$ (un dessin le suggère aisément).
  - 1 **est majorant**, comme on vient de le montrer.

  - **Soit** $\varepsilon > 0$. Montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas majorant, c'est-à-dire qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) \overset{(\bigstar)}{>} 1-\varepsilon$.
    Pour s'approcher au plus près de 1, cherchons x_0 sous la forme $x_0 = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$, de sorte que le cosinus soit maximal. Alors $(\bigstar)$ devient
    $$\frac{4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2} > 1-\varepsilon \iff \frac{1}{1+4k^2\pi^2} < \varepsilon \iff k^2 > \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$
    - **Si** $\varepsilon > 1$, avec n'importe quel k, $x_0 = 2k\pi$ vérifie bien $(\bigstar)$.
    - **Si** $\varepsilon \leqslant 1$, alors en posant $k = \left\lfloor \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right\rfloor + 1$, $x_0 = 2k\pi$ vérifie bien $(\bigstar)$.

    Au total, $1-\varepsilon$ n'est pas majorant et on a bien $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$.
- Montrons de même que $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$
  - -1 **est minorant**, puisque $|f| \leqslant 1$.
  - **Soit** $\varepsilon > 0$. Montrons que $-1+\varepsilon$ n'est pas minorant, i.e. qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) \overset{(*)}{<} -1+\varepsilon$.
    Pour s'approcher au plus près de -1, cherchons x_0 sous la forme $x_0 = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$, de sorte que le cosinus soit minimal. Alors $(*)$ devient
    $$-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2} < -1+\varepsilon \iff \frac{1}{1+(2k+1)^2\pi^2} < \varepsilon \iff (2k+1)^2 > \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$
    - **Si** $\varepsilon > 1$, avec n'importe quel k, $x_0 = (2k+1)\pi$ vérifie bien $(*)$.
    - **Si** $\varepsilon \leqslant 1$, alors il suffit de prendre un entier k supérieur à $\frac{1}{2}\left\lfloor \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right\rfloor$. Par exemple, $k = \left\lfloor \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right\rfloor$. Alors $x_0 = (2k+1)\pi$ vérifie bien $(*)$.

    Au total, $-1+\varepsilon$ n'est pas majorant et on a bien $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$.

Remarque 2 La méthode évoquée dans la remarque précédente est bien difficile à mettre en œuvre ici, f n'ayant pas de limite à l'infini.

✍ **Exercice 3** Soit $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y minorée par 0 (c'est évident). donc $\inf_{\mathbb{R}_+^*} f$ existe. De plus :
- Si $x > 1$, alors $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ et $f(x) = \lfloor x \rfloor \geqslant 1$.
- Si $0 < x < 1$ alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1$.
- $f(1) = 2$.

1 est minorant de f et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, donc $\boxed{\inf_{\mathbb{R}_+^*} f = \min_{\mathbb{R}_+^*} f = 1}$

Remarque 3 1 est atteint sur tout l'intervalle $]1,2[$ et l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

✍ **Exercice 4** Soit $E = \left\{ \frac{n}{mn+1},\ m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- E contient $\frac{1}{2}$ (avec $(m,n) = (1,1)$) donc est non vide. De plus, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$
  $$0 < \frac{n}{mn+1} < \frac{n}{n+1} = 1$$
  Donc E est non vide et borné, et $\sup E$ et $\inf E$ existent.
- **Montrons que** $\sup E = 1$. 1 est bien majorant, et montrons que c'est le plus petit :
  Soit $\varepsilon > 0$. montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas majorant de E en trouvant un élément $x \in E$ tel que $x > 1-\varepsilon$.
  Cela revient à trouver $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\frac{n}{mn+1} > 1-\varepsilon$ $(\bigstar)$.
  Posons $\boxed{m=1}$. $(\bigstar)$ devient alors $\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon$ soit $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

— Si $\varepsilon > 1$, avec n'importe quel $n \in \mathbb{N}^*$, (m,n) vérifie $(\bigstar)$.
— Si $\varepsilon \leqslant 1$, en posant $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, le couple (m,n) vérifie $(\bigstar)$.
Dans tout les cas, $1-\varepsilon$ n'est pas majorant de E, i.e. $\sup E = 1$.

— **Montrons que** $\inf E = 0$. 0 est bien minorant, et montrons que c'est le plus grand :
Soit $\varepsilon > 0$. montrons que ε n'est pas minorant de E en trouvant un élément $x \in E$ tel que $x < \varepsilon$.
Cela revient à trouver $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\dfrac{n}{mn+1} < \varepsilon \ (*)$.
Posons $\boxed{n=1}$. $(*)$ devient alors $\dfrac{1}{m+1} < \varepsilon$ soit $m > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.
— Si $\varepsilon > 1$, avec n'importe quel $m \in \mathbb{N}^*$, (m,n) vérifie $(*)$.
— Si $\varepsilon \leqslant 1$, en posant $m = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, le couple (m,n) vérifie $(*)$.
Dans tout les cas, ε n'est pas minorant de E, i.e. $\sup E = 0$.

✍ **Exercice 5** Soient f et g deux fonctions strictement positives majorées sur un intervalle I.
Alors $\sup_I f$, $\sup_I g$, $\inf_I f$ et $\inf_I g$ existent et

$$\forall x \in I,\ 0 \leqslant \inf_I f \leqslant f(x) \leqslant \sup_I f \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \inf_I g \leqslant g(x) \leqslant \sup_I g$$

Par produit on a donc $\forall x \in I$,

$$0 \leqslant \inf_I (f) \times \inf_I (g) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant \sup_I (f) \times \sup_I (g)$$

Donc fg est bornée sur I, $\sup_I (f) \times \sup_I (g)$ en est un majorant et $\inf_I (f) \times \inf_I (g)$ un minorant.
Ainsi

$$\boxed{\sup_I (fg) \leqslant \sup_I (f) \times \sup_I (g)} \quad \text{et} \quad \boxed{\inf_I (fg) \geqslant \inf_I (f) \times \inf_I (g)}$$

Remarque 4 On a le même résultat et la même preuve avec l'hypothèse « f et g positives » au lieu de « strictement positives ».

✍ **Exercice 6** Soit E une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$, $M = \sup E$, $m = \inf E$.
On pose $\mathcal{D} = \left\{ |x-y|,\ (x,y) \in E^2 \right\}$.
E est non vide, donc en choisissant $x \in E$, on a $0 = |x-x| \in \mathcal{D}$, donc $\mathcal{D} \neq \varnothing$. De plus

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \begin{cases} m \leqslant x \leqslant M \\ m \leqslant y \leqslant M \end{cases} \Rightarrow m - M \leqslant x - y \leqslant M - m \Rightarrow |x-y| \leqslant M - m$$

$\mathcal{D}$ est donc majoré par $M-m$. Donc il admet une borne supérieure $\sup \mathcal{D}$

Montrons que $\sup \mathcal{D} = M - m$ en considérant μ un majorant de $\mathcal{D}$: alors

$$\forall y \in E, \forall x \in E,\ x - y \leqslant \mu$$

$y \in E$ étant fixé quelconque, on a ainsi

$$\forall x \in E,\ x \leqslant \mu + y$$

Par « passage au sup », on en déduit

$$M \leqslant \mu + y$$

Ainsi

$$\forall y \in E,\ M - \mu \leqslant y$$

Par « passage à l'inf » on peut donc affirmer

$$M - \mu \leqslant m$$

et ainsi

$$M - m \leqslant \mu$$

$M-m$ est donc le plus petit des majorants de $\mathcal{D}$, CQFD.

Remarque 5 **Autre solution** : soit $\varepsilon > 0$: par définition des bornes supérieures et inférieures,

$$\exists x \in E \ / \ x > M - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \exists y \in E \ / \ y < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais alors

$$|x - y| \geqslant x - y > M - m - \varepsilon$$

Donc $M - m - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\mathcal{D}$, CQFD.

✍ **Exercice 7** Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et borné tel que $\inf A > 0$.
On pose $B = \left\{\frac{1}{a},\ a \in A\right\}$. Alors B est non vide (il existe un élément a de A, donc $\frac{1}{a} \in B$).
De plus si $b \in B$, alors il existe $a \in A$ tel que $b = \frac{1}{a}$. Comme $a \geqslant \inf A$, on a alors $b \leqslant \frac{1}{\inf A}$.
Ainsi B est majoré par $\frac{1}{\inf A}$ et minoré par 0 : B est borné non vide, et $\sup B$ existe.
Montrons que $\sup B = \frac{1}{\inf A}$: si M est un majorant de B, alors

$$\forall b \in B,\ b \leqslant M \quad \text{soit} \quad \forall a \in A,\ 0 < \frac{1}{a} \leqslant M$$

(en effet $\inf A > 0$, donc $\forall a \in A,\ a > 0$). On en déduit que

$$\forall a \in A,\ a \geqslant \frac{1}{M} > 0$$

Par « passage » à la borne inférieure, il vient $\inf A \geqslant \frac{1}{M} > 0$, soit $M \geqslant \frac{1}{\inf A}$.
$\frac{1}{\inf A}$ est donc le plus petit majorant de B, soit

$$\boxed{\sup B = \frac{1}{\inf A}}$$

✍ **Exercice 8** Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1] \\ \forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \end{cases}$$

On se propose de démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1] \ / \ f(\alpha) = \alpha$.
On pose à cet effet : $A = \{x \in [0,1] \ / \ f(x) \geqslant x\}$.

1. On a $f(0) \in [0,1]$, donc $f(0) \geqslant 0$, *i.e.* $0 \in A$.

   Majoré (évidemment par 1) et non vide, il admet une borne supérieure $\sup A = m \in [0,1]$.
2. Si $z \in A$, alors par définition $z \leqslant f(z)$ et par hypothèse $f(z) - f(m) \leqslant |z - m| = m - z$ (car $z \leqslant m$) : donc

   $$\boxed{\forall z \in A,\ z \leqslant f(z) \leqslant f(m) + m - z}$$

   En considérant les deux membres extrêmes de cet encadrement, on obtient

   $$\forall z \in A,\ 2z \leqslant f(m) + m \quad i.e.$$

   soit

   $$\forall z \in A,\ z \leqslant \frac{f(m) + m}{2}$$

   Par passage au sup il vient

   $$m \leqslant \frac{m + f(m)}{2}$$

   Ce dont on déduit aisément

   $$\boxed{m \leqslant f(m)}$$

3. On suppose que $m \neq 1$. Alors
$$\forall z \in]m, 1]\,,\ f(m) - f(z) \leqslant |m - z| \overset{z \geq m}{=} z - m$$
Mais comme $z > m$, on a $z \notin A$, et donc $f(z) < z$: en ajoutant, il vient
$$\boxed{\forall z \in]m, 1]\,,\ f(m) < 2z - m}$$
Mais alors
$$\forall z \in]m, 1]\,,\ \frac{f(m) + m}{2} < z$$
Par passage à l'inf, on en déduit (puisque $\inf]m, 1] = m$) que
$$\frac{m + f(m)}{2} \leqslant m$$
Et ainsi
$$\boxed{f(m) \leqslant m}$$
4. On a ainsi d'après 2) et 3), si $m \neq 1$, $\boxed{f(m) = m}$
Mais si $m = 1$, alors on a d'après 2. : $1 = m \leqslant f(m) \leqslant 1$, d'où
$$\boxed{f(m) = m = 1}$$
Dans les deux cas on a bien l'existence d'un réel $m = \sup A$ vérifiant $f(m) = m$, CQFD.

Remarque 6 Ce résultat est vrai en supposant seulement que f est continue sur un intervalle fermé f-stable. Sauriez-vous le montrer ?

✍ **Exercice 9** *Distance à une partie.*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel **fixé**. Soit l'ensemble $E = \{|x - a|\,,\ a \in A\}$.
Comme A est non vide, E non plus ; il est évidemment minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ notée $d(x, A)$.
2. Soit B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que $B \subset A$.
Pour tout $b \in B$: $d(x, A) \leqslant |x - b|$ car b est aussi un élément de A.
Par « passage à l'inf » : $d(x, A) \leqslant d(x, B)$.
3. Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $c \in A \cup B$; alors $c \in A$ ou $c \in B$.
Cela entraine que $d(x, A) \leqslant |x - c|$ ou $d(x, B) \leqslant |x - c|$.
Donc, dans tous les cas : $\min(d(x, A), d(x, B)) \leqslant |x - c|$.
Par passage à l'inf on obtient : $\boxed{\min(d(x, A), d(x, B)) \leqslant d(x, A \cup B)}$.

D'autre part, comme on a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, la question 2 nous donne :
$d(x, A) \geqslant d(x, A \cup B)$ et $d(x, B) \geqslant d(x, A \cup B)$
Cela a pour conséquence que $\boxed{\min(d(x, A), d(x, B)) \geqslant d(x, A \cup B)}$.

Les deux résultats encadrés prouvent l'égalité demandée : $\boxed{\min(d(x, A), d(x, B)) = d(x, A \cup B)}$.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$d(x, A) \leqslant |x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|$ (inégalité triangulaire)
$\iff d(x, A) - |x - y| \leqslant |y - a|$.
Alors par passage à l'inf : $d(x, A) - |x - y| \leqslant d(y, A)$.
d'où : $d(x, A) - d(y, A) \leqslant |x - y|$.

On montrerait de même : $d(y, A) - d(x, A) \leqslant |y - x|$ et comme $|y - x| = |x - y|$, on obtient :
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$$

✍ **Exercice 10** On considère $A = \{q \in \mathbb{Q}_+, q^2 \leqslant 2\}$. De manière évidente A est non vide (car $\frac{1}{2} \in A$) et A est majorée par 2 : elle admet donc une borne supérieure. Soit $a = \sup A$; on a forcément $a > 0$.
Démontrons par **l'absurde** que $a \notin \mathbb{Q}$ en supposant que $a \in \mathbb{Q}$.
Procédons ensuite par **disjonction des cas** :

Supposons que $a^2 < 2$: Pour tout $h \in [0, 1]$, on a $(a+h)^2 = a^2+2ah+h^2 \leqslant a^2+2ah+h$. C'est en particulier vrai pour $h = \min(1, \frac{2-a^2}{2a+1})$ qui est un rationnel de $]0, 1]$. Pour ce h on a :

$$(a + h)^2 \leqslant a^2 + (2a + 1)h \leqslant a^2 + 2 - a^2 = 2$$

Cela signifie que $a + h \in A$ car $a + h \in \mathbb{Q}_+$. Cela est absurde car $\sup A = a < a + h$.

Supposons que $a^2 > 2$: pour tout réel h : $(a - h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 \geqslant a^2 - 2ah$. Posons $h = \min(a, \frac{a^2-2}{2a}) > 0$. h est un rationnel. L'inégalité précédente donne :

$$(a - h)^2 \geqslant a^2 - 2ah \geqslant a^2 - (a^2 - 2) = 2$$

Donc pour tout $q \in A$: $\quad a^2 > (a - h)^2 \geqslant 2 \geqslant q^2$

Comme $a - h \in \mathbb{Q}_+$ cela est en contradiction avec le fait que a est le plus petit des majorants de A.

Supposons que $a^2 = 2$: cela est absurde car l'on sait par ailleurs de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

En conclusion, $\boxed{a \notin \mathbb{Q}}$: cet ensemble ne vérifie par la propriété de la borne supérieure.