Calculs de sommes et de produits

1 Sommes et produits

1.1 Définition

Notation 1 Soient n et p deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$; on appelle *intervalle d'entiers compris entre p et n*, l'ensemble des entiers relatifs k vérifiant : $p \leqslant k \leqslant n$ et on note cet ensemble $[\![p, n]\!]$. Autrement dit, $[\![p, n]\!] = \{k \in \mathbb{Z}\ ,\ p \leqslant k \leqslant n\}$.

Remarque 1 Si $p > n$, alors l'intervalle d'entiers est vide.

✍ **Exercice 1** p et n sont deux entiers naturels.

1. Expliciter $[\![3, 6]\!]$, combien d'entiers se trouvent dans cet intervalle ?
2. Combien d'entiers se trouvent dans $[\![p, n]\!]$? ♡
3. Que peut bien désigner la notation $[\![p, +\infty[\![$? $[\![p, n[\![$?

Notation 2 Soient n et p deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ des nombres complexes.

① La somme de ces $n - p + 1$ nombres se note de plusieurs façons :

$$a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{p \leqslant k \leqslant n} a_k = \sum_{k \in [\![p,n]\!]} a_k$$

② Le produit de ces $n - p + 1$ nombres se note de plusieurs façons :

$$a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n = \prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{p \leqslant k \leqslant n} a_k = \prod_{k \in [\![p,n]\!]} a_k$$

Vocabulaire 1

— k est dite variable ou indice de sommation, cette somme (resp. produit) ne dépend pas de k, on dit que k est *muet*, et peut être remplacé par toute autre lettre.

— p est la borne inférieure de la sommation (resp. du produit) et n la borne supérieure. Une somme (resp. un produit) dont la borne supérieure est strictement inférieure à la borne inférieure est indicée par un ensemble vide, et vaut par convention 0 (resp. vaut 1).

— a_k est dit terme (resp. facteur) *générique*.

Remarques 2

① Les indices peuvent appartenir à des ensembles finis I qui ne sont pas des intervalles d'entiers.

② On peut aussi sommer sur des couples d'indices, on parle alors de somme double, par exemple si $I = [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, alors : $\displaystyle\sum_{k \in I} x_k$ peut s'écrire $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} x_{i,j}$.

③ Ces remarques sont valables pour les produits.

Définition 1 (factorielle d'un entier naturel)

Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit la *factorielle de n*, notée $n!$, par : $\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{sinon} \end{cases}$

✍ **Exercice 2**

1. Evaluer $n!$ pour n dans $[\![0,6]\!]$.
2. Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
3. Pour deux entiers naturels p et q avec $q < p$, exprimer $\prod_{n=q+1}^{p} n$ à l'aide de factorielles.
4. Simplifier $\dfrac{(n+3)!}{(n-1)!}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

1.2 Propriétés

Proposition 1

Soient n et p deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et $a_p, a_{p+1}, \dots, a_n$ et $b_p, b_{p+1}, \dots, b_n$ et λ des nombres complexes.

❶ $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right)$ **(linéarité)**

❷ Si q est un entier compris entre p et n,

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} a_k = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=q+1}^{n} a_k\right)$$

❸ $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right)$

Remarque 3 Tomberez-vous dans le piège ? $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = \dots$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n = \dots$

2 Changement d'indice

Une même somme peut s'écrire de différentes manières indépendamment de la lettre-indice. Le passage d'une écriture à l'autre est appelé *changement d'indice*.

2.1 Translation d'indice

On ajoute ou retire à la variable de départ le même entier (en général, $-1, 1, -2, 2$). Par exemple si on part de la somme $S = \sum_{j=1}^{n} a_j$ et qu'on veut procéder au changement d'indice $j = k+1$, comme j varie de 1 à n, alors k varie de 0 à $n-1$. On a donc :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \text{ par mutisme des variables.}$$

2.2 Inversion de compteur

On multiplie la variable de départ par -1, puis on ajoute une constante. Les deux variables, celle de départ et la nouvelle, varient donc en sens contraire ! Que la somme soit écrite avec l'une

ou l'autre des variables, la borne inférieure de sommation est toujours plus petite que la borne supérieure.

Partons de la même somme $S = \sum_{j=1}^{n} a_j$ et faisons le changement de $j = n - k$: j variant de 1 à n, k, qui vaut $n - j$, varie de 0 à $n - 1$. On écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

2.3 Somme et produit téléscopique

Un changement d'indice peut prouver l'importante proposition suivante :

Proposition 2 (♡♡)

Soient n et p deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{n+1}$ des nombres complexes.

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p} \qquad (\forall k \in [\![p, n]\!]\ a_k \neq 0)$$

On qualifie de *téléscopique* ce type de somme et de produit.

2.4 Identités remarquables, factorisations, sommes usuelles

Proposition 3

Pour tout entier naturel n et tous complexes a et b, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Corollaire 1 (♡)

Pour tout entier naturel n et tous complexes a et b, on a :

① $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

② $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$

③ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

④ si n est **impair** : $a^n + 1 = (a + 1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^k$

✍ **Exercice 3** Factoriser dans $\mathbb{C}$: $x^6 - 64$ et $x^5 + 243$.

Proposition 4 (sommes usuelles ♡)

n et p deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et q un complexe différent de 1.

❶ $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

❷ $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$

Remarque 4 Que vaut la dernière somme quand $q = 1$?

✍ **Exercice 4** Prouver la deuxième égalité de la proposition 4 en donnant un polynôme P de degré 3 tel que pour tout complexe x, $P(x+1) - P(x) = x^2$.

✍ **Exercice 5** Simplifier pour tout réel x : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \mathrm{d}x$.

3 Binôme de Newton

3.1 Coefficients binomiaux

Définition 2

Soit n un entier naturel et p un entier relatif. On appelle *coefficient du binôme p parmi n* le réel noté $\binom{n}{p}$ et lu « p parmi n », défini par :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p < 0 \text{ ou } p > n \end{cases}$$

Proposition 5 (valeurs remarquables ♡ ♡ ♡)

Soit un entier naturel n :

❶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

❷ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

❸ si $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

❹ si $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1}$

✍ **Exercice 6** Calculer $\binom{12}{8}$.

Proposition 6

Soit n un entier naturel et p un entier relatif, on a :

❶ si $n \geqslant 1$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

❷ $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ (**triangle de Pascal**)

❸ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (**symétrie**)

Remarque 5 Le triangle de Pascal permet de calculer ces coefficients pour de petites valeurs de n et de p.

$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
....	⋮	....	...	...	...	⋱		
n	1	...	...	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	...	1	
$n+1$	1	...	...	...	$\binom{n+1}{k+1}$	...	...	1

✍ **Exercice 7** Démontrer (et retenir !) que les coefficients binomiaux sont entiers.

3.2 La formule

Proposition 7 (Binôme de Newt♡n)
Soit (a,b) un couple de complexes et n un entier naturel :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemples 1

♡ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

♡ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

♡ $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$

Corollaire 2 (cas particuliers)
Soit n un entier naturel, on a :

❶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

❷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

4 Sommes doubles

Proposition 8 (Somme rectangulaire)
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de np complexes ; alors

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)$$

Notation 3 Les sommes précédentes peuvent se noter plus ou moins pompeusement :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$$

✍ **Exercice 8** Soient n et p deux entiers non nuls ; calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} ij$. En déduire un cas général quand $a_{i,j}$ est à « variables séparées ».

Sous les mêmes hypothèses (mais avec $p = n$) et le même principe, les bornes de sommation peuvent dépendre des indices :

Proposition 9 (Somme triangulaire)

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)$$

✍ **Exercice 9** Pour n entier non nul et une famille de complexes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ prouver que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$

✍ **Exercice 10** Calculer $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

✍ **Exercice 11** Calculer $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k+1}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

5 Inégalités et sommes

Proposition 10

Soient un entier naturel n et $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ des réels.

On suppose que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k\leqslant b_k$; alors $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$

Si on suppose que : $\forall k\in[\![1,n]\!], 0\leqslant a_k\leqslant b_k$; alors $\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k$

Autrement dit, on peut sommer « terme à terme » n inégalités à condition de veiller à ce que chacune des n inégalités soient vraies. Attention, par de réciproque ici.
De même, on peut multiplier membre à membre des inégalités de nombres **tous** positifs.

✍ **Exercice 12** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^4}{1+k^2}$ est majorée.

✍ **Exercice 13** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}$.

Remarque 6 La somme de n termes est majorée par n fois le plus grand d'entre-eux et minorée par n fois le plus petit d'entre-eux.

✍ **Exercice 14** Pour n entier naturel, soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Proposition 11 (généralisation de l'inégalité triangulaire)

Soient un entier naturel n et $a_1,\dots,a_n$ des réels : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|$

✍ **Exercice 15** Soit un réel α. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k\alpha)-\sin((k+1)\alpha)}{2^k}$ est bornée.