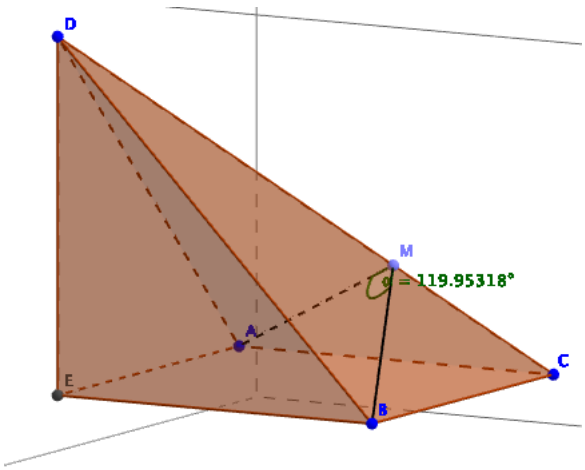
Correction de l'exercice 6 « produit scalaire »

$DOACB$ est une pyramide de sommet D à base carrée telle que les faces AOD et BOD soient rectangles en O et telle que $OD = OB$. Soit M un point de $[CD]$.
Quelle est la position de M pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ est maximale ?



Sur la figure ci-dessus le point E est confondu avec O.
Par hypothèse, le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ est orthonormé.
On y a : $A(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,0,1)$ et $C(1,1,0)$.
Comme M appartient à $[DC]$, il existe un réel $t \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DC}$.
Les coordonnées de M en fonction de t sont : $M(t, t, 1-t)$.

Pour $t \in [0,1]$, on pose $\theta(t) = \widehat{AMB}$. C'est un angle dans $[0, \pi]$.
On procède comme à l'exercice 2 :

$$\cos(\theta(t)) = \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}{MA \times MB} = \frac{-t(1-t) - t(1-t) + (t-1)(t-1)}{(\sqrt{(t-1)^2 + (1-t)^2 + t^2})^2} = \frac{3t^2 - 4t + 1}{3t^2 - 4t + 2}.$$

Soit alors $f : t \longmapsto \dfrac{3t^2 - 4t + 1}{3t^2 - 4t + 2}$ définie sur $[-1, 1]$. Elle y est dérivable et sa dérivée s'exprime sur cet intervalle par $f'(t) = \dfrac{6x - 4}{(3t^2 - 4t + 2)^2}$ qui est du signe de $6t - 4$. Il est alors facile de voir que f a un minimum sur $[-1, 1]$ qui est atteint pour $t = \dfrac{2}{3}$.

D'autre part, comme la fonction cos est décroissante sur $[0, \pi]$, la fonction θ est nécessairement croissante sur $[0, 2/3]$ et décroissante sur $[2/3, 1]$ (composition de fonctions monotones), de sorte que $\theta(t)$ est maximal quand $f(t)$ est minimal : pour $t = \dfrac{2}{3}$; ce maximum vaut alors $\cos(\theta(t)) = \cos(\theta(2/3)) = -\dfrac{1}{2}$.

Concluons : quand M est situé au $2/3$ de $[DC]$ en partant de D, l'angle $\widehat{AMB}$ est maximal.

$\boxed{\text{Il vaut } \operatorname{Arccos}(-\tfrac{1}{2}) = \dfrac{2\pi}{3}.}$